Aufgabe 12 Preispolitik

Ein Industrieunternehmen A, das nur ein Produkt herstellt, entnimmt seiner Betriebsbuchhaltung (Kosten- und Leistungsrechnung) folgende Angaben:
Der Kostenverlauf ist gekennzeichnet durch ständig steigende Gesamtkosten, wobei der Kostenzuwachs mit jeder produzierten Einheit unterschiedlich ist. Anfänglich nimmt der Kostenzuwachs bedingt durch effizienteren Arbeitskräfte- und Maschineneinsatz ab. Von einer bestimmten Produktionsmenge an ist der Kostenzuwachs jedoch durch höheren Energieverbrauch und Maschinenverschleiß steigend. Von den Gesamtkosten des Unternehmens sind die folgenden Zahlen bekannt:

Die fixen Kosten belaufen sich auf 20 GE, der Graph der Gesamtkostenfunktion hat im Punkt $P(3|56)$ einen Wendepunkt und bei einer Produktionsmenge von 1 ME entstehen Kosten in Höhe von 42 GE. Die Kapazitätsgrenze des Betriebes liegt bei 9 ME und es wird beliebige Teilbarkeit der Mengeneinheiten (ME) unterstellt.

<u>Hinweis:</u> *Alle zu skizzierenden Funktionsgraphen sind in <u>einem</u> Koordinatensystem darzustellen. Wählen Sie dabei für die Ordinate 20 GE = 1 cm und für die Abszisse 1 ME = 1 cm.*

a) Ermitteln Sie aus obigen Angaben den Term der „einfachsten" Gesamtkostenfunktion K_A des Unternehmens A.

Geben Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{ök}$ an und skizzieren Sie den Graphen der Gesamtkostenfunktion K_A.

Das Industrieunternehmen A ist einer von vielen Anbietern auf dem Markt. Die Preisfunktion p ist demnach eine Konstante und sie lautet: $p(x) = 26$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Gewinnfunktion G_A.

Ermitteln Sie damit folgende für das Unternehmen wichtige Informationen:

- die Gewinnschwelle und die Gewinngrenze,
- die Produktions-/ Absatzmenge, bei der maximaler Gewinn erzielt wird,
- den maximalen Gewinn.

Skizzieren Sie den Graphen der Gewinnfunktion G_A.

Ein Konkurrenzunternehmen B hat in seinem Betrieb durch Beobachtung der Kostenentwicklung in Abhängigkeit von der produzierten Menge folgende Grenzkostenfunktion K'_B bestimmt:

$$K'_B: \quad K'_B(x) = \frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 .$$

c) Bestimmen Sie bei fixen Kosten von 30 GE die Gesamtkostenfunktion von K_B.

d) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass sich bei der vorliegenden Kostensituation des Unternehmens B die Graphen der Grenzkosten K'_B und der Stückkosten k_B im Minimum der Stückkosten schneiden. Die entsprechende Produktionsmenge soll nicht errechnet werden.

e) Bestimmen Sie für den gegebenen Marktpreis p von 26 GE mit Hilfe eines geeigneten Näherungsverfahren die Gewinnschwelle des Unternehmens B und führen Sie das Verfahren solange durch, bis sich die dritte Nachkommastelle nicht mehr ändert.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Die „einfachste“ Funktion, die den vorgegebenen Kostenverlauf mit einem Wendepunkt erfüllt, wäre eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $K_A(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $K'_A(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $K''_A(x) = 6ax + 2b$ $K_A(0) = 20:$ I. $d = 20$ $K_A(3) = 56:$ II. $27a + 9b + 3c + d = 56$ $K''_A(3) = 0:$ III. $18a + 2b = 0$ $K_A(1) = 42:$ IV. $a + b + c + \mathrm{d} = 42$ Nach Lösen des LGS erhält man: $a = 1;\ b = -9;\ c = 30;\ d = 20$. Also gilt: $K_A:\ K_A(x) = x^3 - 9x^2 + 30x + 20$ $D_{ÖK} = [0;9]$ (Funktionsgraph von K_A siehe Abbildung)	10	10	
b)	Der Gewinn errechnet sich aus der Differenz der Erlöse und der Kosten. $G_A(x) = E(x) - K_A(x)$ $E(x) = p(x) \cdot x = 26x$ $\Rightarrow G_A : G_A(x) = 26x - \left(x^3 - 9x^2 + 30x + 20\right) = -x^3 + 9x^2 - 4x - 20$ <u>Gewinnschwelle und Gewinngrenze:</u> $Bed: G_A(x) = 0$ $-x^3 + 9x^2 - 4x - 20 = 0 \quad / \cdot (-1)$ $x^3 - 9x^2 + 4x + 20 = 0$ (durch Probieren $x_1 = 2$) Horner Schema: $\begin{array}{l\|rrrr} & 1 & -9 & 4 & 20 \\ \hline & 0 & 2 & -14 & -20 \\ x = 2 & 1 & -7 & -10 & 0 \end{array} \Rightarrow x_1 = 2$ $x^2 - 7x - 10 = 0$ $x_{2,3} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{89}{4}}$ $x_2 \approx 8{,}22$; $x_3 \approx -1{,}22 \notin D_{Ök}$ Die Gewinnschwelle liegt bei 2 ME und die Gewinngrenze bei rund 8,22 ME. <u>oder</u>: $GS\left(2\middle\|0\right);\ GG\left(8{,}22\middle\|0\right)$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

Gewinnmaximum:

$Bed: \quad G'(x) = 0 \;\; und \;\; G''(x) \neq 0$

$G_A'(x) = -3x^2 + 18x - 4$

$G_A''(x) = -6x + 18$

$\Rightarrow \qquad -3x^2 + 18x - 4 = 0$

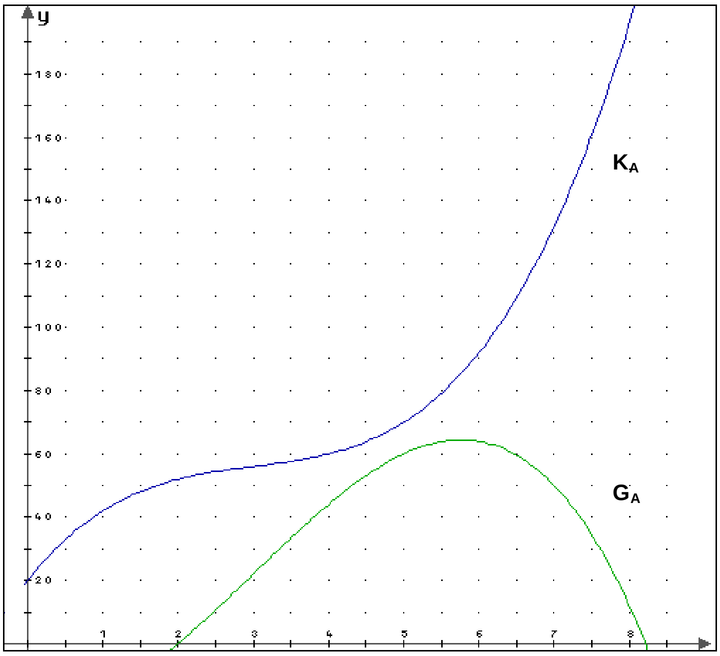
$x^2 - 6x + \frac{4}{3} = 0$

$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\frac{23}{3}}$

$x_1 \approx 5{,}77 \qquad G_A''(5{,}57) < 0 \Rightarrow Max. \qquad G_A(5{,}77) \approx 64{,}46$

[$x_2 \approx 0{,}23$ nicht relevant, da der Wert kleiner als die Gewinnschwelle ist.]

Die gewinnmaximale Absatzmenge beträgt 5,77 ME und erbringt einen maximalen Gewinn von 64,46 GE.



I	II	III
10	20	5

c) Die Kostenfunktion ist die Stammfunktion von K_B‘, die durch den Punkt $P(0|30)$ verläuft. Der Nachweis kann alternativ über das Integrieren oder das Differenzieren erfolgen:

Integrieren:

$$K_B(x) = \int \left(\frac{1}{x+e} + \frac{1}{8}x^3 \right) dx + c \Rightarrow K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + c$$

$$K_B(0) = 30 \Leftrightarrow \ln(e) + c = 30 \Leftrightarrow c = 29$$

$$K_B(x) = \ln(x+e) + \frac{1}{32}x^4 + 29$$

	Lösungsskizze	I	II	III
	Differenzieren: $K_B'(x)=\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3 \quad \wedge \quad$ *Nachweis von* $K_B(0)=30$		5	
d)	Bed.: $K_B'(x)=k_b(x) \;\Leftrightarrow\; k_b'(x)=0$ $K_B'(x)=\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3$ $k_B(x)=\frac{K_B(x)}{x}=\frac{\ln(x+e)+\frac{1}{32}x^4+29}{x}=\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{1}{32}x^3+\frac{29}{x}$ $k_B'(x)=\frac{\frac{1}{x+e}\cdot x-\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}$ $=\frac{\frac{1}{x+e}}{x}-\frac{\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}$ (1) $\quad K_B'(x)=k_B(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3=\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{1}{32}x^3+\frac{29}{x}$ $\frac{1}{x+e}+\frac{1}{8}x^3-\frac{\ln(x+e)}{x}-\frac{1}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ $\frac{1}{x+e}-\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{3}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ (2) $\quad k_B'(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\frac{1}{x+e}}{x}-\frac{\ln(x+e)}{x^2}+\frac{3}{32}x^2-\frac{29}{x^2}=0 \quad \vert \cdot(x)$ $\frac{1}{x+e}-\frac{\ln(x+e)}{x}+\frac{3}{32}x^3-\frac{29}{x}=0$ Die Bestimmungsgleichungen (1) und (2) stimmen überein; folglich werden sie auch von demselben *x*-Wert erfüllt. Damit ist gezeigt, dass sich die Graphen der Grenzkosten und der Stückkosten im Minimum der Stückkosten schneiden.		5	15
e)	Bed.: $G_B(x)=0$ $G_B(x)=E(x)-K_B(x)$ $G_B(x)=26x-\ln(x+e)-\frac{1}{32}x^4-29$ $26x-\ln(x+e)-\frac{1}{32}x^4-29=0$ (keine ganzzahlige Lösung!) $\left.\begin{array}{l}G_B(1)\approx-4{,}34\\ G_B(2)\approx 20{,}95\end{array}\right\}\; x_0=1{,}1$ Newton-Verfahren: $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	$f(x) = G_B(x) = 26x - \ln(x+e) - \frac{1}{32}x^4 - 29$ $f'(x) = G_B'(x) = 26 - \frac{1}{x+e} - \frac{1}{8}x^3$ $x_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)}{f'(1{,}1)} \approx 1{,}1 - \frac{-1{,}7855537}{25{,}571727} \approx 1{,}1698253$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1{,}1698253 - \frac{-0{,}0009886}{25{,}542693} \approx 1{,}169864$ $\Rightarrow GS(1{,}170 \mid 0)$		20	
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20