Aufgabe 13 ln-Funktion und Verknüpfungen

In der Anlage sind die Graphen zweier Funktionen g und f dargestellt.
Gegeben sind weiterhin zwei Funktionen h_1 und h_2, mit $h_1(x) = x$ und $h_2(x) = \ln x$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von h_1 und h_2 in das Koordinatensystem in der Anlage, in dem bereits f und g dargestellt sind.
Die Funktionsgleichungen der Funktionen g und f sind aus den Termen der Funktionen h_1 und h_2 bzw. einem der Terme gebildet.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichungen. Argumentieren Sie dabei, warum jeweils Ihre gewählten Verknüpfungen die Funktionen g bzw. f darstellen.

b) Weisen Sie nach, dass g und f im selben Punkt ein Minimum besitzen.

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = t \cdot x \cdot (\ln x)^2$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Bestimmen Sie die Extrempunkte dieser Funktionenschar in Abhängigkeit von t. Formulieren Sie eine Aussage zur Lage aller Extrempunkte in Abhängigkeit von t.

d) Bestimmen Sie die Wendepunkte von f_t.
Formulieren Sie eine Aussage zur Lage aller Wendepunkte in Abhängigkeit von t.

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $\tilde{f}_3(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (\ln(x+1))^2$ im wesentlichen Intervall unter Berücksichtigung der bisher gesammelten Erkenntnisse. Legen Sie für diese Skizze ein neues Koordinatensystem an. (1 Längeneinheit ≅ 4 cm)

f) Zeigen Sie durch geeignete Rechnungen, dass eine Stammfunktion von $f_1(x) = x \cdot (\ln x)^2$ wie folgt lautet:

$$F_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \left[(\ln x)^2 + \left(\frac{1}{2} - \ln x \right) \right] + C \quad , \quad C \in \mathbb{R}.$$

g) h_1 bildet zusammen mit der Geraden $x = \mathrm{e}$ und der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck.
Zeigen Sie mit Hilfe des uneigentlichen Integrals, dass die vom Graphen von f_1 und den beiden Katheten des Dreiecks eingeschlossene Fläche halb so groß ist wie das beschriebene Dreieck.

Anlage zur Aufgabe 13 ln - Funktion und Verknüpfungen