

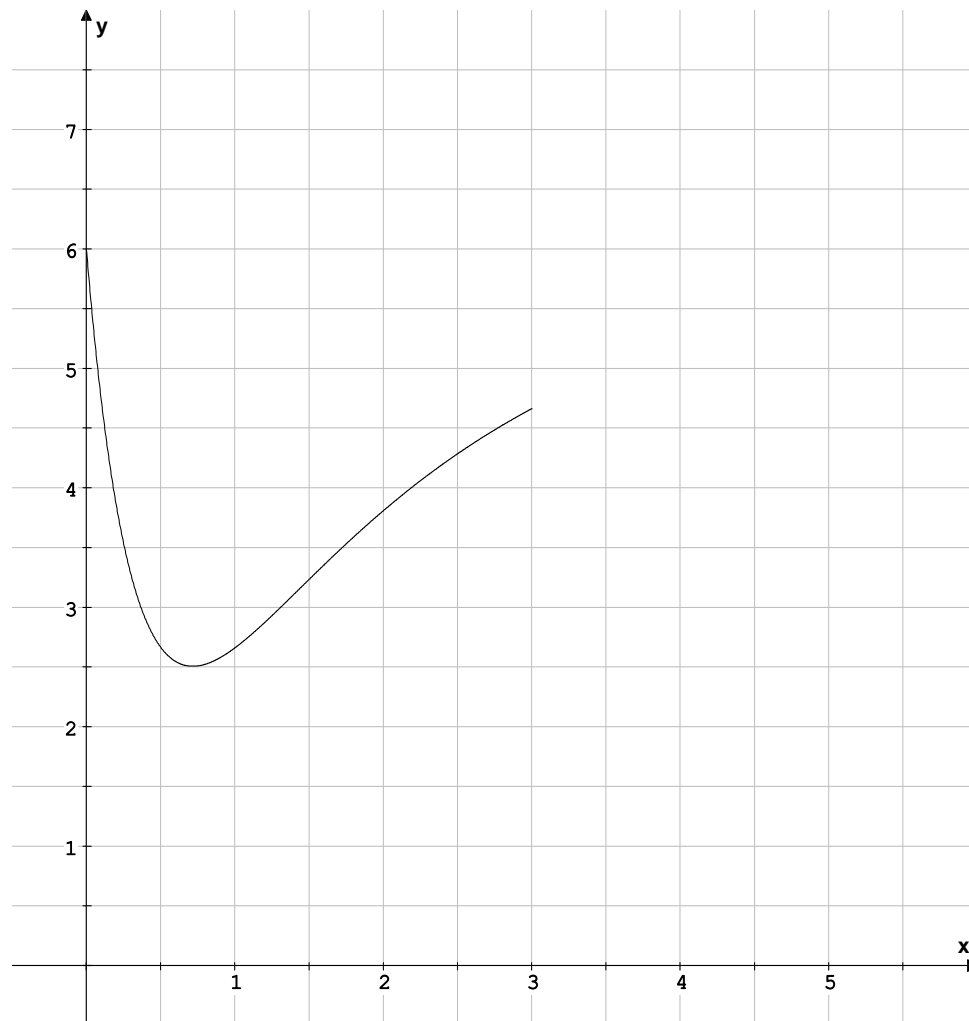
Aufgabe 4 Bevölkerungsentwicklung

In dieser Aufgabe, die sich an eine Aufgabe aus der schriftlichen Abiturprüfung Hamburg 2005 anlehnt, geht es um eine allgemeine Exponentialfunktion und um die Frage, wie gut diese Funktion die Entwicklung einer Population darstellt.

Die Funktion f hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = -6e^{-0.5x} + 6e^{-3x} + 6 = 6 \cdot (1 - e^{-0.5x} + e^{-3x}).$$

Für einen Teil des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion gegeben:



- a) Der Funktionsterm ist die Summe von drei Termen, zwei mit positivem Vorzeichen, einem mit negativem Vorzeichen.
Beschreiben Sie, ausgehend vom Graphen, das Verhalten der Funktion im Hinblick auf folgende Fragen:

Wie arbeiten die drei Terme für den Funktionswert bei $x = 0$ zusammen?

Warum fällt die Funktion für kleine x ?

Warum steigt die Funktion wieder?

Warum bestimmt der Term 6 das Verhalten der Funktion für große x ?

- b) Die Gleichung $f'(x) = 0$ ist äquivalent zu der Gleichung $e^{-0.5x} = 6 \cdot e^{-3x}$ und damit auch äquivalent zu der Gleichung $-0,5x = \ln(6) - 3x$.

Untersuchen Sie unter Verwendung dieses Hinweises die Funktion f auf Extrempunkte.

- c) Untersuchen Sie die Funktion f auf Wendestellen.
(Verwenden Sie zur Berechnung die in b) vorgestellte Methode).

Eine Situation, für die diese Funktion ein Modell liefern könnte, ist folgende:

In einer Kleinstadt hat der einzige große industrielle Arbeitgeber sein Werk geschlossen. Daraufhin ziehen viele qualifizierte Arbeitskräfte mit ihren Familien aus dieser Kleinstadt weg. Die Politiker versuchen durch Schaffung von Arbeitsplätzen in anderen Bereichen langfristig neue Bewohner zu gewinnen. Es dauert allerdings eine gewisse Zeit, bis diese Maßnahme erste Erfolge zeigt.

Die Statistiker tragen die Einwohnerzahl regelmäßig in eine Grafik ein, wobei die Einteilung der x -Achse in Jahrzehnten erfolgt und die der y -Achse in zehntausend Einwohner.

- d) Interpretieren Sie die Bedeutung des Extremwertes und die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang der Aufgabe.
- e) Begründen Sie, warum die angegebene Funktion f zur Modellierung der beschriebenen Situation zumindest nicht ganz fern liegt.

- f) Bestimmen Sie k so, dass F mit

$$F(x) = 12 \cdot e^{-0,5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$$

eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie das Integral von f über dem Intervall $[0; 1,5]$.

Mit diesem Wert sollen Sie folgende Aufgabe bearbeiten:

15 Jahre nach der Werkschließung konnte die Stadt Fördergelder beantragen. Diese richteten sich nach der durchschnittlichen Einwohnerzahl (auf Tausend gerundet) der Stadt in diesen 15 Jahren. Bestimmen Sie die Höhe der Fördermittel, die die Stadt damals erhielt, wenn es für jeden Einwohner 1000 DM an Fördergeldern gab.

- g) Skizzieren Sie den weiteren Verlauf des Graphen von f (s. Skizze) und geben Sie unter der Bedingung, dass sie weiterhin der Funktion f genügt, eine begründete Prognose über die weitere Entwicklung der Einwohnerzahl ab.

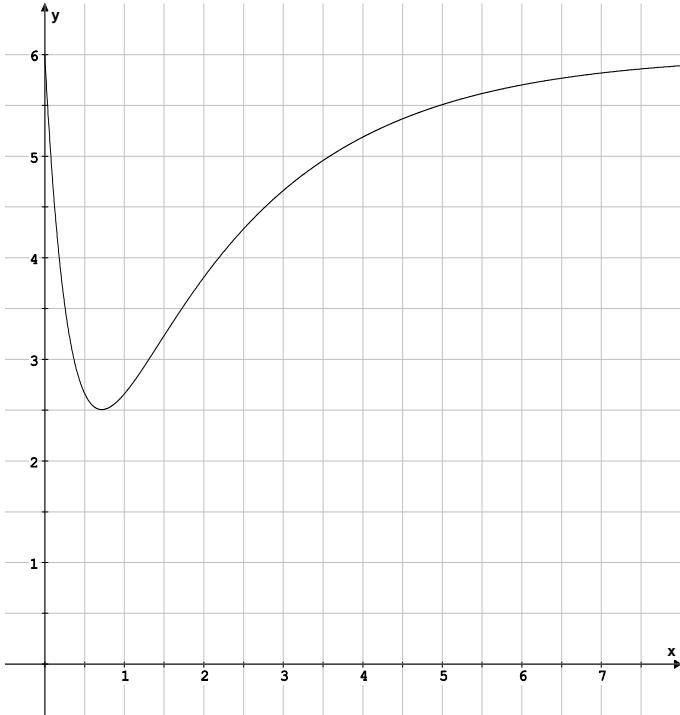
Ermitteln Sie die größtmögliche Einwohnerzahl, mit der unter diesen Bedingungen die Stadtentwickler rechnen müssten.

Beschreiben Sie Gründe, warum sich die Einwohnerzahl vermutlich anders entwickeln wird.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	<p>Der Graph beginnt bei $x = 0$ mit einem Funktionswert von 6, $f(0) = 6$. Dann fällt er, läuft durch ein Minimum und nähert sich wieder (vermutlich) einem konstanten Wert an.</p> <p>Bei $x = 0$ gilt $f(0) = 6 = 6 - 6e^0 + 6e^0$.</p> <p>Die beiden Exponentialterme gleichen sich also aus, und der Funktionswert wird nur vom absoluten Glied bestimmt.</p> <p>Da der Betrag des Terms $6e^{-3x}$ schneller sinkt als der Betrag des Terms $-6e^{-1,5x}$ steigt, werden die Funktionswerte zunächst kleiner.</p> <p>Für große x-Werte sind sowohl $-6e^{-0,5x}$ als auch $+6e^{-3x}$ (und damit auch ihre Summe) klein gegen Eins. Der Term 6 übernimmt also wieder das „Kommando“. Das Zusammenspiel von Termen, die zunächst den Funktionswert vermindern und dann immer weniger wichtig werden, führt zu einem Minimum.</p>	5	15	
b)	<p><u>Untersuchung auf Extrempunkte:</u></p> $f'(x) = 3e^{-0,5x} - 18e^{-3x}$ $f'(x) = 0: 3e^{-0,5x} - 18e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 3e^{-0,5x} = 18e^{-3x}$ $\Leftrightarrow e^{-0,5x} = 6e^{-3x}$ $\Leftrightarrow -0,5x = \ln 6 - 3x$ $\Leftrightarrow 2,5x = \ln 6$ $\Leftrightarrow x = \frac{\ln 6}{2,5} = 0,7167.$ <p>Der Grafik kann entnommen werden, dass f an dieser Stelle ein Minimum hat. Der Nachweis kann aber auch über die 2. Ableitung erfolgen:</p> $f''\left(\frac{\ln 6}{2,5}\right) = -1,5e^{-0,5 \cdot \frac{\ln 6}{2,5}} + 54e^{-3 \cdot \frac{\ln 6}{2,5}} > 0.$ <p>Berechnung des Funktionswertes an der Minimalstelle:</p> $f\left(\frac{\ln 6}{2,5}\right) = -6e^{-0,5 \cdot \frac{\ln 6}{2,5}} + 6e^{-3 \cdot \frac{\ln 6}{2,5}} + 6 \approx 2,506.$ <p>f hat in $T(0,72 \mid 2,51)$ ein Minimum.</p>	10	10	
c)	<p><u>Untersuchung auf Wendestellen:</u></p> $f''(x) = -1,5e^{-0,5x} + 54e^{-3x}$ $f'''(x) = 0,75e^{-0,5x} - 162e^{-3x}$ $f''(x) = 0: -1,5e^{-0,5x} + 54e^{-3x} = 0 \Leftrightarrow 1,5e^{-0,5x} = 54e^{-3x} \Leftrightarrow e^{-0,5x} = 36e^{-3x}$ $-0,5x = \ln 36 - 3x \Leftrightarrow 2,5x = \ln 36 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 36}{2,5} \approx 1,433.$			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Der Grafik kann entnommen werden, dass f an dieser Stelle eine Wendestelle hat. Ein hinreichendes Argument ist, dass die 2. Ableitung an dieser Stelle eine Durchgangsnulstelle hat. Der Nachweis kann aber auch über die 3. Ableitung erfolgen: $f'''(1,433) \approx -1,831 \neq 0$.</p> <p>Die Funktion f hat die Wendestelle (gerundet) bei 1,43.</p>		10	
d)	<p>(Zum Zeitpunkt der Werkschließung beträgt die Einwohnerzahl 60 000). Der Tiefpunkt gibt den Zeitpunkt mit der geringsten Einwohnerzahl und die dazugehörige Einwohnerzahl an. (Nach gut 7 Jahren hat die Einwohnerzahl mit etwa 25 000 Einwohnern ihr Minimum erreicht. Danach stieg sie wieder an.)</p> <p>An der Wendestelle steigt die Einwohnerzahl am stärksten. (Nach gut 14 Jahren hat das Bevölkerungswachstum seinen Höhepunkt erreicht.)</p> <p><i>Hinweis: Die Klammerpassagen werden von den Prüflingen nicht erwartet.</i></p>			5
e)	<p>Grundsätzlich beschreibt die Funktion das Zusammenwirken zweier Faktoren jeweils exponentiellen Wachstums – einmal negativen Wachstums von einem festen Wert, einmal positiven Wachstums gegen einen anderen festen Wert. Exponentielles Wachstum tritt auf, wenn die Veränderungsrate proportional zum Wert ist.</p> <p>Bei den Veränderungen der Bevölkerungszahl nach der Werkschließung, also der Bevölkerungsabnahme, bedeutet dies, dass der Bevölkerungsabbau letztlich fast proportional zur jeweiligen Bevölkerungszahl erfolgt.</p> <p>Die Wiederansiedlung arbeitet von Beginn an auf einer längeren Zeitskala. Sie hat anfangs einen größeren Erfolg als später, so dass das Bevölkerungswachstum immer langsamer steigt.</p> <p><i>Hinweis: Warum allerdings der Aufwärtstrend einer Funktion des Typs $f(x) = k \cdot (1 - e^{-mx})$ folgen sollte, ist der Situation nicht zu entnehmen.</i></p>		5	5
f)	<p>$F(x) = 12 \cdot e^{-0,5x} + k \cdot e^{-3x} + 6x$.</p> <p>Da die Ableitung einer Stammfunktion von f wiederum f ergeben muss, wird hier F' gebildet und dann ein Koeffizientenvergleich durchgeführt:</p> $F'(x) = -6e^{-0,5x} - 3k \cdot e^{-3x} + 6$ $f(x) = -6e^{-0,5x} + 6e^{-3x} + 6$ <p>Vergleich der Koeffizienten von F' und f: Aus $-3k = 6$ folgt $k = -2$. Danach gilt: $F(x) = 12 \cdot e^{-0,5x} - 2 \cdot e^{-3x} + 6x$.</p> <p><u>Berechnung des Integrals:</u></p> $\int_0^{1,5} f(x) dx = \left[12e^{-0,5x} - 2e^{-3x} + 6x \right]_0^{1,5} \approx 4,6462$ <p>Berechnung der durchschnittlichen Einwohnerzahl in diesen 15 Jahren: $\frac{4,6462}{1,5} \approx 3,0975$.</p>			

Lösungsskizze		Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<p>Dies entspricht einer durchschnittlichen Einwohnerzahl von etwa 31 000. Die Stadt erhielt Fördermittel in Höhe von etwa 31 Millionen DM.</p>	5	15	
g)	 <p>Unter diesen Bedingungen prognostiziert die Funktionsvorschrift, dass die Einwohnerzahl immer langsamer steigen und nie den Wert 60 000 übersteigen würde.</p> <p>Die Einwohnerzahl wird sich wohl anders entwickeln, da z.B. weitere Firmen eröffnen oder schließen könnten, die Alterspyramide sich auswirkt oder wegen der schönen Lage sich die Zuwanderung verstärkt...</p>		5	10
	Insgesamt 100 BWE	20	60	20