

Aufgabe ganzrationale Funktion Einführung:

Diese Aufgabe ist dann zu rechnen, falls die weiter unten stehende Funktionenschaar größere Probleme bereitet

Gegeben sei die Funktion f durch

$$Y = f(x) = \frac{1}{6} x \cdot (x-3)^2 \quad x \in \mathbb{R}$$

Führe eine Kurvendiskussion durch, d.h.:

1. Untersuche f auf Symmetrie

Funktion ist weder Achs- noch Punktsymmetrisch, da im Polynom sowohl Terme mit geraden als auch ungeraden Exponenten vorkommen

2. Ermittle die Nullstellen der Funktion

$f(x)=0$; Ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor 0 ist, also gilt:

$$x_{01} = 0 \text{ und } x_{02} = 3$$

3. Art und Lage der Extrema

Bedingung: $f'(x)=0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 1,5$

Extremstellen:

Hochpunkt bei (1|0,66); Tiefpunkt bei (3|0)

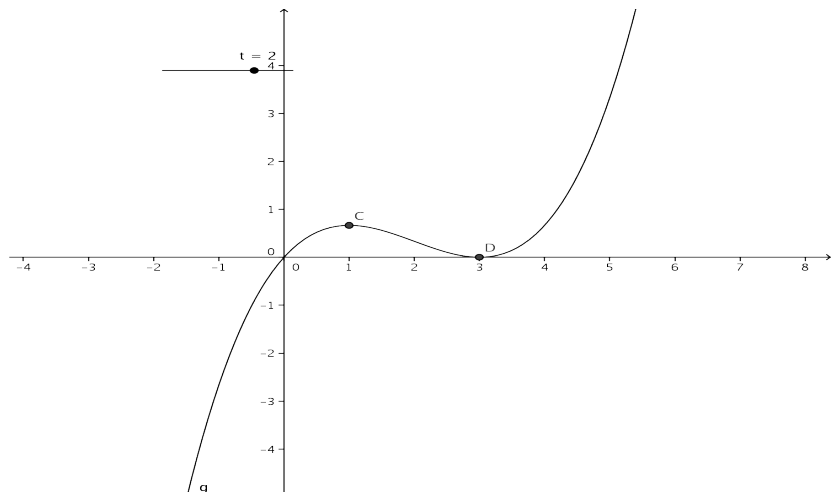
Lösung mit

Verhalten für betragsgroße x (Grenzwertbetrachtung)

4. Wendestellen $f''(x) = x - 2$

Wendepunkt bei $x=2$

5. Skizze



Aufgabe Funktionenschaar

Gegeben sei die Funktionenschaar

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 + tx^2 + t^2x \quad x \in \mathbb{R}$$

Aufgaben:

1. Untersuche die Funktionen auf Symmetrie

Kurzfassung: Da die Funktionenschaar f_t weder gerade noch ungerade ist, ist sie weder achs- noch punktsymmetrisch.

2. Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit des Parameters t

Bedingung: $f'(x) = 0$, also untersuche man $\frac{1}{3}x^3 + tx^2 + t^2x = 0$

Klammerere x aus und erhalte $x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 + tx + t^2\right) = 0$

Ein Produkt ist 0, wenn eines der beiden Faktoren Null ist, also: $x_1 = 0$ oder $\frac{1}{3}x^2 + tx + t^2 = 0$.

im zweiten Fall findet man die Nullstellen durch anwenden der pq-Formel

$$\frac{1}{3}x^2 + tx + t^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3tx + 3t^2 = 0 \quad x_{1,2} = -\frac{1}{2}t \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}t\right)^2 - 3t^2} \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2}t \pm \sqrt{\frac{1}{4}t^2 - 3t^2}$$

Betrachtet man nun den Ausdruck unter der Wurzel, so stellt man fest, daß f außer $x_1 = 0$ keine weiteren Nullstellen besitzen kann, da der Radikand $\frac{1}{4}t^2 - 3t^2$ niemals positiv werden kann

3. Untersuche das Monotonie und Krümmungsverhalten der Funktionen in Abhängigkeit von t

Monotonie:

Eine Fkt. ist genau dann streng monoton steigend/fallend wenn gilt $f'(x) > 0$ bzw $f'(x) < 0$

Da mit Ungleichungen unbequem zu rechnen ist, bestimme ich zunächst die Lage der Punkte, an dem die Funktionenschaar weder steigt noch fällt., also $f'(x) = x^2 + 2tx + t^2 = 0$

$$x_{1,2} = -t \pm \sqrt{(t^2 - t^2)}$$

Damit erhalten wir 2 Intervalle, innerhalb derer die Funktionenschaar streng monoton verläuft;

$]-\infty; -t[$ und $]-t; \infty[$. Untersuchen wir nun einen Punkt innerhalb dieser Intervalle auf Steigend/Fallend, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}]-\infty; -t[; f'(-t-1) &= (-t-1)^2 + 2t \cdot (-t-1) + t^2 = t^2 + 2t + 1 - 2t^2 - 2t + t^2 = 1 \Rightarrow \text{monoton steigend} \\]-t; \infty[; f'(-t+1) &= (-t+1)^2 + 2t \cdot (-t+1) + t^2 = t^2 - 2t + 1 - 2t^2 + 2t + t^2 = 1 \Rightarrow \text{monoton steigend} \end{aligned}$$

(Daraus folgt dann auch, daß bei $x=-t$ ein Terrassenpunkt vorliegen muß (Vorzeichen – Wechsel Kriterium))

Krümmungsverhalten

Dazu muss die Zweite Ableitungsfunktion betrachtet werden: $f''(x) = 2x + 2t$ Die Krümmung verschwindet im Falle von $f''(x) = 0$,

$$2x + 2t = 0 \Rightarrow 2x = -2t \Rightarrow x = -t$$

Betrachte nun das Intervall $]-\infty; -t[$ $f''(-t-1) = 2 * (-t-1) + 2t = -1 \Rightarrow$ *rechtkrümmung*
 $] -t; \infty[$ $f''(-t+2) = 2 * (-t+1) + 2t = +1 \Rightarrow$ *linkskrümmung*

Daraus läßt sich auch folgern, daß bei $x=-t$ ein rechts-links Wendepunkt vorliegt

4. Geben Sie Extrema, Wendepunkte und Terrassenpunkte in Abhängigkeit von t an, so vorhanden

Berechne Koordinate des Terrassenpunktes: Setze dazu $-t$ in f ein:

$$f_t(-t) = \frac{1}{3}(-t)^3 + t(-t)^2 + t^2 = -\frac{1}{3}t^3 + t^3 + t^2 = \frac{2}{3}t^3 + t^2$$

Koordinate Terrassenpunkt $(-t; \frac{2}{3}t^3 + t^2)$

Der Terrassenpunkt auch Wendepunkt:

5. für LK: Geben Sie die Ortslinie der Terrassenpunkte an.

$x = -t \Rightarrow t = -x$ Setze nun $t = -x$ in die Y-Koordinate des Terrassenpunktes ein:

$$y = \frac{2}{3}(-x)^3 + (x)^2 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x^3 + (x)^2$$

6. Skizziere die Funktion für $t=2$

