

Aufgaben Exponentialfunktion:

Einführungsaufgabe Exponentialfunktion:

Das radioaktive Element Pollonium 209 hat eine Halbwertszeit von 103 Jahren, d.h. Nach 103 Jahren ist von der Ausgangssubstanz nur noch die Hälfte vorhanden. Zum Zeitpunkt $t=0$ stehen 1kg Pollonium 209 zur Verfügung.

1. Stelle eine Funktionsgleichung für diesen Sachverhalt auf

Erster Ansatz über allgemeine Exponentialfunktion $f: y = a * e^{kx}$. Setze nun (0|1) (Ein Kilogramm zu Pollonium zum Startzeitpunkt und (103|0,5) (0,5 kg nach 109 Jahren) in f ein und erhalte folgendes Gleichungssystem

$$1 = a * e^k * 0$$

$$0,5 = a * e^{k * \frac{1}{2}} \quad \text{Aus der ersten Zeile erhält man } a=1, \text{ Aus der zweiten folgt dann}$$

$$0,5 = e^{k * \frac{1}{2}} \Rightarrow \ln(0,5) = \ln(e^{k * \frac{1}{2}})$$

$$\ln(0,5) = k * \frac{1}{2} * \ln(e) = k * \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$k = 2 * \ln(2)$$

Aus dieser kleinen Rechnung ergibt sich folgende Funktionsgleichung: $f: y = 1 * e^{2 * \ln(2) * x}$

Eine andere Überlegung geht von folgender Überlegung aus:

Zeit	0	103	206	309
Menge Pollonium	1kg	$1\text{kg} * \frac{1}{2}$	$1\text{kg} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$ $1\text{kg} * \frac{1}{4}$	$1\text{kg} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$ $1\text{kg} * \frac{1}{8}$

Alle 103 Jahre halbiert sich das Pollonium. Daraus kann man auch auf die folgende Exponentialfunktion schließen

$$f: y(t) = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{103}}$$

2. Wie viel Pollonium steht nach 4 Monaten zur Verfügung, wieviel Pollonium ist nach 10 Jahren noch vorhanden?

$f(1/3)$ (4 Monate sind $1/3$ Jahre und $f(10)$)

3. Welcher Zeitraum muß vergehen, damit die Polloniummenge auf 0,11kg abgenommen hat.

Durch beiderseitigem logarithmieren läßt sich diese Gleichungssystem lösen:

$$0,11 = 1 * \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{103}} \Rightarrow \log(0,11) = \log\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{103}} \Rightarrow \log(0,11) = \frac{t}{103} * \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow t = \frac{103 * \log(0,11)}{\log(0,5)}$$

Alternative Einführungsaufgabe

In einem Teich wird eine Algenkolonie ausgesetzt. Die Algenkolonie bedeckt zu diesem Zeitpunkt $0,01 \text{ m}^2$. Die Kolonie wächst 10% täglich.

Wann wird die Algenkolonie den 10 m^2 großen Teich vollständig überwuchern.

Lösung: Der Gedankengang „10% tägliches Wachstum“ heißt, daß am nächsten Tag $0,01 * 1,1 \text{ m}^2$ Fläche zugedeckt ist, am übernächsten $0,01 * 1,1 * 1,1$ usw. Daraus folgt die Gleichung

$$f(t) = 0,01 * 1,1^t$$

Weitere Aufgaben

Eine Exponentialfunktion gehe durch die Punkte A (1|3) und B=(2|9). Benutze den Ansatz

$$f: y = a * e^{k * x} \quad \text{Stelle die dazugehörige Funktionsgleichung auf.}$$

$$f(1)=3 \quad f(2)=9$$

Kurvendiskussion einer Exponentialfunktion

Gegeben sei die Funktion $f(x) = e^{2x} - 2 * e^x$

Führe eine komplette Kurvendiskussion mit f durch, d.h.

1. Bestimme Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

2. Grenzwertbetrachtung für ganz große und ganz kleine x (Grenzwertbetrachtung)
unendlich, falls x sehr groß wird und Null, falls x sehr klein wird.

3. Untersuche auf Symmetrie

Weder Punkt noch asymmetrisch

4. Bestimme Nullstellen

$f(x) = e^{2x} - 2 * e^x$ Trick für Nullstellen bei Exponentialfunktionen: e^x ausklammern, also:

$$f(x) = e^x * (e^x - 2)$$

Ein Produkt ist Null, falls ein Faktor Null ist. Da e^x niemals Null wird, muß nur noch der Term $(e^x - 2) = 0$ untersucht werden.

$$(e^x - 2) = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

5. Lage und Art der Extremstellen

Notwendige Bed. für Extremstelle: $f'(x) = 0$ ($f'(x) = 2e^{2x} - 2 * e^x$)

$2e^{2x} - 2 * e^x = 0 \Rightarrow e^x (2e^x - 2) = 0$ Da e^x stets ungleich Null, muß nur noch der Term

$$2e^x - 2 = 0 \quad \text{untersucht werden:}$$

$$2e^x - 2 = 0 \quad 2e^x = 2 \Rightarrow x = 0$$

Untersuche mit Hilfe des Monotoniekriteriums auf HP/TP. Betrachte daher die Monotonie in den

Intervallen

$] -\infty; 0[$ $f'(-1) = 2 * (e^{-2} - e^{-1}) < 0$ Daraus folgt, daß hier ein Tiefpunkt vorliegen muß
 $] 0; \infty[$ $f'(1) = e > 1$

Koordinate des Tiefpunktes (0|f(0)) Null in die Funktionsgleichung f eingesetzt ergibt als Tiefpunktcoordinate (0|-2)

6. Wendepunkte

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt : $f''(x) = 0$ $f''(x) = 4e^{2x} - 2 * e^x$

Klammere nun $2e^x$ aus: $2e^x(e^x - 2) = 0$ Daraus folgt $e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

Überprüfe, ob Wendepunkt oder was anderes mit der dritten Ableitung

$f'''(x) = 8e^{2x} - 2 * e^x$ *ungleich null*

7. Gib den Wertebereich an. $W = [-2; \infty[$

8. Skizziere den Graphen der Funktion

